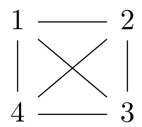
**THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SÉRIE 2**

**Exercise 1.** (facile) *Exercice d'échauffement*
Considérons l'action naturelle de $S_4$ sur l'ensemble $X$ de tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$. Cette action peut être vue comme permutant les arêtes du diagramme suivant :




(1) Déterminez l'orbite de $\{1, 2\} \in X$ ;
(2) Trouvez le stabilisateur de $\{1, 2\} \in X$ ;
(3) Vérifiez que le théorème orbite-stabilisateur est vérifié en retrouvant $|S_4|$ à partir des points précédents.

**Exercise 2.** (moyen) *Action sur les classes à gauche*
Soit $G$ un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe. Nous définissons une action de $G$ sur $G/H$ par

$$\begin{aligned} G \times G/H &\to G/H \\ (g, g'H) &\mapsto gg'H \end{aligned}$$

(1) Montrez que cela définit bien une action de $G$ ;
(2) Pour $gH \in G/H$, trouvez le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(gH)$ ;

Si $X, Y$ sont des ensembles munis d'actions de $G$, nous disons que $X$ et $Y$ sont isomorphes en tant que $G$-ensembles s'il existe une fonction bijective $f : X \to Y$ telle que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$. Une application d'ensemble qui saitisfait la propriété décrite est appelée $G$-équivariante.

**Exercise 3.** (moyen) Soient $H$ et $K$ des sous-groupes d'un groupe $G$. Définissez l'action de $G$ sur les ensembles $G/H$ et $G/K$ par multiplication à gauche (voir Exercise 2). Montrez que $G/H$ et $G/K$ sont isomorphes en tant que $G$-ensembles si et seulement si $H$ et $K$ sont des sous-groupes conjugués de $G$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que $gHg^{-1} = K$.

**Exercise 4.** (moyen) Soit $V = \mathbb{F}_2^3$ et $G = GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de $V$ (ses éléments sont des applications linéaires bijectives $V \to V$).

(1) Définissez une action naturelle de $G$ sur

$$X = \{W \subset V | \dim(W) = 2\}.$$

(2) Montrez que l'action définie ci-dessus est transitive ;

(3) Déterminez la cardinalité $|X|$.

**Exercise 5.** (moyen)

Soit $G \leq S_n$. Considérez son action naturelle sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrez que si $G$ agit transitivement sur $\Omega$, alors $n$ divise $|G|$.

(2) Soit $G$ un groupe et $X = \{H \leq G\}$ l'ensemble des sous-groupes de $G$. Montrez que $G$ agit sur $X$ par

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, H) &\mapsto gHg^{-1}. \end{aligned}$$

Pour $H \in X$, quel est le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(H)$ ?

**Exercise 6.** (difficile) *Actions de p-groupes et points fixes*
Utilisez le théorème orbite-stabilisateur pour prouver le résultat suivant. Soit $p > 0$ un nombre premier et soit $G$ un groupe d'ordre $p^n$ pour un certain $n \geq 1$ qui agit sur un ensemble $X$ avec $p \nmid |X|$. Montrez qu'il existe $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$.